Interdisziplinäres Zentrum
für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) Dr. Peter Zaspel
Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg

Übungsblatt 13

19.07.2016 – 26.07.2016

Einführung in die Numerik SS 2016

Dieses letzte Übungsblatt dient der **Wiederholung und Vorbereitung auf die Klausur bzgl. der theoretischen Aufgaben**. Es ist nicht mehr Teil der Wertung für die Klausurzulassung.

Aufgabe 1. Polynom-Interpolation

a. Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathcal{R}$ mit $f(x) = x^3$ gegeben. Seien ferner die Stützstellen $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$ gegeben. Verwenden Sie die Newton'sche Interpolationsformel um ein Interpolationspolynom aufzustellen, das die Funktion f in den Stellen x_0, x_1, x_2 exakt interpoliert. Hierbei berechnen Sie die Koeffizienten der Interpolationsformel mittels des Verfahrens der dividierten Differenzen.

b. Sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^{n+1}[a,b]$ gegeben, die an den paarweise verschiedenen Stützstellen $x_i \in [a,b], i = 0, ..., n$ ausgewertet wird und $p \in P_n$ interpolieree f in diesen Stellen. Wie lautet dann die aus der Vorlesung bekannte Aussage über den Fehler

$$f(x) - p(x)$$

für jedes $x \in [a,b]$.

Aufgabe 2. Spline- / trigonometrische Interpolation

a. Definieren Sie einen *kubischen Spline* $s_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ bzgl. einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

b. Sei eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, die an Stützstellen $x_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, ..., n-1$ ausgewertet wird, so dass Stützstellen-/Wertepaare $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n-1}$ mit $y_i = f(x_i)$ entstehen. Des weiteren sei $n = 2m+1$, d.h. n sei ungerade. Geben Sie die koeffizienten a_l, b_l, so dass der trigonometrische Ausdruck

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{m} (a_l \cos(lx) + b_l \sin(lx))$$

die Interpolationsbedingungen

$$q(x_k) = y_k \quad \forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

erfüllt.

c. Zeigen Sie, dass für die n-te komplexe Einheitswurzel ω_n gilt:

$$\omega_n^k \omega_n^l = \omega_n^{k+l}$$

für $k, l \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Gauß-Approximation

a. Definieren Sie die Gauß-Approximation sowie die Bestapproximation einer Funktion.

b. Zeigen Sie: Die Bestapproximation einer Funktion bzgl. der Gauß-Approximation ist eindeutig bestimmt.
Tipp: Nutzen Sie folgende Aussage:

$$(g \text{ Bestapproximation für } f) \quad \Leftrightarrow \quad ((f-g, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in S)$$

mit S dem endlichdimensionalen Unterraum bzgl. dem f approximiert wird.

Aufgabe 4. Numerische Integration

a. Geben sie für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und Stützstellen $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_n \leq b$ die *interpolatorische Quadraturformel* an.

b. Geben Sie die aus der Vorlesung bekannte Fehlerformel für die summierte Simpson-Regel an.

c. Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ gegeben. Bestimmen Sie eine Näherung an

$$\int_0^1 f(x)dx$$

mit der *einfachen* Simpson-Regel.

d. Definieren Sie die Gauß-Quadratur und insbesondere auch die Gauß'sche Quadraturformel.

Aufgabe 5. Normen, Kondition

a. Definieren Sie die Konditionszahl $\mathrm{cond}(A)$ für eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

b. Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^2 = P$. Außerdem sei P nicht die Null-Matrix. Zeigen Sie, dass $\|P\| \geq 1$ für jede natürliche Matrixnorm $\|\cdot\|$

Aufgabe 6. Matrix-Zerlegungen

a. Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 10 & 9 & 14 \\ 2 & 9 & 14 & 17 \\ 4 & 14 & 17 & 30 \end{pmatrix}$$

b. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit A wie in der vorangegangenen Teilaufgabe und

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der LR-Zerlegung aus der vorangegangenen Aufgabe.

c. Definieren Sie die Eigenschaft einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal zu sein.

d. Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Dann gilt

$$\|QA\|_2 = \|A\|_2 \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

e. Bestimmen Sie die QR-Zerlegung der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7. Iterationsverfahren

a. Zeigen Sie, dass die Iterationsvorschrift

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

für $x^{(k)} \in \mathbb{R}^3$ und

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix},$$

bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm für beliebige $x^{(0)}$ und c konvergiert. Nutzen Sie für Ihren Beweis den Banach'schen Fixpunktsatz.

b. Definieren Sie den Spektralradius einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 8. Spezielle Iterationsverfahren für Lineare Gleichugssysteme

a. Wie lautet das SOR-Verfahren in Matrix-Notation?

b. Berechnen Sie die ersten zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens für das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ und die erste Näherung x_0 mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c. Zeigen Sie mit einem bekannten Konvergenzkriterium, dass das Gauß-Seidel-Verfahren in der vorangegangenen Teilaufgabe konvergiert.

Aufgabe 9. Krylov-Unterraumverfahren

a. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Sei $\tilde{x}$ die Näherung eines Projektionsverfahrens mit Suchraum $\mathcal{K}_m$, Raum der Nebenbedingungen $\mathcal{L}_m$, Startvector x_0 sowie $Ax = b$ das gegebene lineare Gleichungssystem. Ferner gelte $\mathcal{K}_m = \mathcal{L}_m$. Welche Bestapproximationseigenschaft erfüllt $\tilde{x}$?

b. Geben Sie dei aus der Vorlesung bekannte Abschätzung zum Konvergenzfehler des CG-Verfahrens an.

c. Wie lautet der klassische Algorithmus des CG-Verfahrens?

Abgabe: 26.07.2016, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)