Interdisziplinäres Zentrum
für Wissenschaftliches Rechnen (IWR)
Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg
Dr. Peter Zaspel

Übungsblatt 10

28.06.2016 – 05.07.2016

Einführung in die Numerik SS 2016

Aufgabe 1. Fixpunktverfahren zum Bilden der Inversen (3+3 Punkte)
Zur Berechnung der Inversen A^{-1} einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werden die beiden Fixpunktiterationen

a. $X_t = X_{t-1}(I - AC) + C, \quad t = 1, 2, \ldots, \quad C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär

b. $X_t = X_{t-1}(2I - AX_{t-1}), \quad t = 1, 2, \ldots$

betrachtet. Man gebe hinreichende Kriterien für die Konvergenz dieser Iterationen an.

Aufgabe 2. Konvergenz von Fixpunktverfahren (2+2 Punkte)
Man untersuche die Konvergenz der Fixpunktiteration

$$x^t = Bx^{t-1} + c$$

für die Matrizen

a. $B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$,

b. $B = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Was ist der Limes der Folgen im Falle der Konvergenz? (Hinweis: Es sind die Eigenwerte der Matrizen abzuschätzen. Dazu kann eine geeignete Norm oder auch der Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und der Determinante einer Matrix dienen.)

Aufgabe 3. Konvergenz von Fixpunkt-Verfahren (3+3 Punkte)
Zur Lösung des linearen (2×2)-Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b, \quad x, b \in \mathbb{R}^2,$$

sei das folgende Iterationsverfahren angesetzt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\omega a & 1 \end{bmatrix} x^t = \begin{bmatrix} 1-\omega & \omega a \\ 0 & 1-\omega \end{bmatrix} x^{t-1} + \omega b, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist diese Methode mit $\omega = 1$ konvergent?

b) Man bestimme für $a = 0.5$ den Wert

$$\omega \in \{0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4\},$$

für den der Spektralradius der Iterationsmatrix B_ω minimal wird und skizziere den Graphen der Funktion $f(\omega) = \rho(B_\omega)$.

Aufgabe 4. Konvergenz von Gauss-Seidel und Jacobi für ein konkretes Problem (2+2 Punkte)
Für die Matrix

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

untersuche man mittels einer Abschätzung des Spektralradius, ob das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren für das Gleichungssystem $Ax = b$ konvergiert.

Aufgabe 5. Praktische Aufgabe zu iterative Lösern (3+3+3+1 Punkte)
Man betrachte das lineare Gleichungssystem $A_n x = b$ mit der $(n \times n)$-Matrix $(n := 2^k,\ h := (n+1)^{-1})$

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und dem Vektor $b = h^2(1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Ziel dieser Aufgabe ist es, ein Programm zur iterativen Lösung dieses Gleichungssystems mit Hilfe des Jacobi- und des Gauss-Seidel-Verfahrens zu schreiben. Beide Verfahren sollen abgebrochen/beendet werden, wenn entweder

$$norm := \frac{\|Ax^t - b\|_\infty}{\|x^t\|_\infty} \leq thresh$$

erfüllt ist, oder die maximale Anzahl an Iterationen $tmax = 20000$ erreicht ist. Als Startvektor soll $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$ verwendet werden. Im gesamten Programm soll dabei die Matrix A_n nie aufgestellt werden, sondern ihre Anwendung explizit ausprogrammiert werden. Als Basis dient der Quellcode `iterative_solvers.cpp` aus dem Moodle-Kurs.

a. Implementieren Sie die Funktion `double compute_norm(double* x, double* b, int n)`, die den Wert *norm*, wie zuvor definiert, berechnet.

b. Schreiben Sie die Funktion `void jacobi(double* x, double* b, double thresh, int tmax, int n)`, die das Jacobi-Verfahren durchführt und nach dem oben genannten Abbruchkriterium beendet. Am Anfang wird der Startvektor über `x` übergeben und am Ende wird die näherungsweise Lösung ebenfalls über `x` zurückgegeben. Geben Sie bei jeder 100en Iteration jeweils die Anzahl an Iterationen sowie die Abbruch-Norm *norm* auf dem Bildschirm aus.

c. Analog zur vorangegangenen Teilaufgabe setzen Sie nun die Funktion `void gauss_seidel(double* x, double* b, double thresh, int tmax, int n)` für das Gauss-Seidel-Verfahren um.

d. Das Hauptprogramm führt beide Verfahren für $k = 5$ und $thresh = 10^{-8}$ aus.

Hinweis: Das obige lineare Gleichungssystem entsteht im Übrigen, wenn man das Finite-Differenzen-Verfahren für das Poisson-Randwertproblem mit homogenem Dirichlet-Rand auf $\Omega = (0, 1)$ umsetzt.

Abgabe: 05.07.2016, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)