Übungsblatt 8

14.06.2016 – 21.06.2018

Einführung in die Numerik SS 2016

Aufgabe 1. LR-Zerlegung tridiagonaler Matrizen (5 Punkte)
Gegeben sei eine Tridiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & c_n & a_n \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} &|a_1| > |b_1| > 0 \\ &|a_j| \geq |b_j| + |c_j| > 0, \quad b_j, c_j \neq 0, \quad j \in \{2, ..., n-1\} \\ &|a_n| \geq |c_n| > 0 \ . \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Der Algorithmus

$$\begin{aligned} &r_1 := a_1 \\ &l_j := c_j / r_{j-1} \qquad && j \in \{2, ..., n\} \\ &r_j := a_j - l_j b_{j-1} && j \in \{2, ..., n\} \end{aligned}$$

ist durchführbar (d.h. $r_1, \cdots, r_n \neq 0$) und liefert die LR-Zerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & b_1 & & 0 \\ & r_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & r_n \end{pmatrix}$$

Es gilt somit $det(A) = \prod_{i=1}^{n} r_i \neq 0$, woraus die Invertierbarkeit von A folgt.

Aufgabe 2. Kondition einer spezilellen Tridiagonalmatrix (8 Punkte)
Gegeben sei $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ von folgender Form:

$$T = \begin{pmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{pmatrix}.$$

mit $bc > 0$.

a. Zeigen Sie: T besitzt für $k = 1, ..., n$ die Eigenwerte

$$\lambda_k = a + 2\ b\ \nu \cos(\frac{k\pi}{n+1})$$

mit den Eigenvektoren

$$v_k = \left(\nu \sin(\frac{k\pi}{n+1}), \nu^2 \sin(2\frac{k\pi}{n+1}), \cdots, \nu^n \sin(n\frac{k\pi}{n+1})\right)^T.$$

wobei $\nu = \sqrt{\frac{c}{b}}$ ist.

Nützliche Hilfe: Es gilt für $l, x \in \mathbb{R}$ die Formel:

$$2\cos(x)\sin(lx) = \sin((l+1)x) + \sin((l-1)x)$$

b. Berechnen Sie für $a = 2$ und $b = c = -1$ die Kondition $\text{cond}_2(T)$. Verwenden Sie dabei, dass hier gilt $\text{cond}_2(T) = \frac{\lambda max}{\lambda min}$ mit $\lambda_{max} := \max_i|\lambda_i|$ und $\lambda_{min} := \min_i|\lambda_i|$. Geben Sie das Verahlten der Kondition für $n \longrightarrow \infty$ in Landaunotation an.

Aufgabe 3. Matrizeneigenschaften und positive Definitheit (0.5+0.5+0.5+0.5 Punkte)

a. Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P^2 = P$. Außerdem sei P nicht die Null-Matrix. Zeigen Sie, dass $\|P\| \geq 1$ für jede natürliche Matrixnorm $\|\cdot\|$

b. Zeigen Sie: Sei $\|\cdot\|$ eine zu einer Vektornorm verträgliche Matrizennorm. Dann gilt: $|\lambda| \leq \|A\|$ für alle Eigenwerte λ von A.

c. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische positiv definite Matrizen. Ist die Matrix AB auch symmetrisch und positiv definit (ggf. mit Gegenbeispiel)?

d. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass alle Hauptdiagonal Elemente von A positiv sind.

Aufgabe 4. Gerschgorin-Kreise (5 Punkte)
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine komplexwertige Matrix. Zeigen Sie:

Alle Eigenwerte λ der Matrix A befinden sich in einer der geschlossenen Kreisscheiben in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt a_{ii} und Radius

$$\rho_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|,$$

d.h.

$$\forall \lambda \in \sigma(A)\ \exists i \text{ so dass } |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,.$$

Aufgabe 5. Praktische Aufgabe zur Cholesky-Faktorisierung (5 Punkte)
Im Rahmen dieser Programmieraufgabe soll die Cholesky-Faktorisierung für symmetrische, positiv definite Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ implementiert werden. Hierzu findet sich im Moodle-Kurs der Quellcode `cholesky.cpp`. Dieser stellt den notwendigen Rahmen bereit, um die Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ aus Aufgabe 2 mit $a = 2$ und $b = c = -1$ zu faktorisieren und das Ergebnis auf seine Richtigkeit zu überprüfen. Als Aufgabe verbleibt, die Funktion `void cholesky(double** A, double** L, int n)` Bemerkung 4.3.8 aus der Vorlesung folgend (für beliebige n) zu implementieren.

Aufgabe 6. Praktische Aufgabe zur LR-Zerlegung von Tridiagonalmatrizen (5 Punkte)
In dieser Programmieraufgabe soll die selbe Matrix aus der vorangegangenen Aufgabe mittels der LR-Zerlegung für Tridiagonalmatrizen zerlegt werden. Im Moodle-Kurs findet sich dazu die Datei `tridiag.cpp`, die alles notwendige bereit stellt. Es verbleibt, Beispiel 4.3.2 aus der Vorlesung folgend, den LR-Zerlegungsalgorithmus für Tridiagonalmatrizen in der Funktion `void tridiag(double* a, double* b, double* c, double* alpha, double* beta, double* gamma, int n)` zu implementieren. Für $n = 3$ lautet die LR-Zerlegung z.B.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Abgabe: 21.06.2018, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)