Interdisziplinäres Zentrum
für Wissenschaftliches Rechnen (IWR)
Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg

Dr. Peter Zaspel

Übungsblatt 7

09.06.2016 – 16.06.2016

Einführung in die Numerik SS 2016

Aufgabe 1. Zeilenäquilibrierte Matrizen (5 Punkte)
Eine Matrix, bei der die Betragssummen aller Zeilen gleich sind, nennt man *zeilenäquilibriert*. Durch Multiplikation mit einer regulären Diagonalmatrix kann man jede reguläre Matrix in eine zeilenäquilibrierte transformieren.

Zeigen Sie: Ist A eine zeilenäquilibrierte Matrix, so gilt mit jeder regulären Diagonalmatrix D die Abschätzung

$$\mathrm{cond}_\infty(A) \leq \mathrm{cond}_\infty(DA).$$

Aufgabe 2. Matrizeneigenschaften (2+2+1 = 5 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a. Für eine Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt stets

$$\|I\| \geq 1,$$

wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

b. Eine strikt diagonal-dominante Matrix ist regulär.

c. Eine diagonal-dominante Matrix ist regulär.

Aufgabe 3. Gauß-Elimination (4+4 Punkte)

a. Man löse durch Gauß'sche Elimination (ohne Pivotierung) von Hand das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 9 & -2 & 1 \\ -3/2 & 30 & -12 & 0 \\ 1 & -15 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 18 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(Hinweis: der Lösungsvektor hat ganzzahlige Komponenten.)

b. Man bestimme die LR-Zerlegung von A.

Aufgabe 4. Kondition konkreter Matrizen (2 Punkte)

Es sei $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}, \qquad d_{ii} > 0.$$

Geben Sie $cond_\infty(D) = \|D\|_\infty \|D^{-1}\|_\infty$ an.

Aufgabe 5. Praktische Aufgabe zur LR-Zerlegung (2 + 3 + 5 + 0 Punkte)
In dieser Aufgabe soll eine LR-Zerlegung ohne Pivotisierung implementiert werden. Als Basis finden Sie die Quelltext-Datei `lr.cpp` im Moodle-Kurs.

a. Ergänzen Sie die Funktion `void print_mat(double** A, int n)` so, dass die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf dem Bildschirm ausgegeben wird.

b. Implementieren Sie die Funktion `void mat_mat(double** C, double** A, double** B, int n)`, die für $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrizen-Multiplikation $C = A \cdot B$ durchführt.

c. Schreiben Sie die Funktion `void compute_lr(double** A, double** L, int n)`, die als Eingabe im 2D-Array `A` eine $n \times n$-Matrix erhält, bei der die LR-Zerlegung ohne Pivotisierung durchführbar ist. Als Ausgabe erzeugt diese Funktion eine LR-Zerlegung der Eingabematrix mit der linken unteren Dreiecksmatrix (mit Einsen auf der Diagonalen) im 2D-Array `L` und der rechten oberen Dreiecksmatrix im Array `A`.

d. Die Haupt-Routine des vorgegebenen Quelltextes benutzt die zuvor implementierten Funktionen, um die LR-Zerlegung aus Aufgabe 3 zu berechnen und testet durch erneute Multiplikation von L und R, ob die berechneten Matrizen korrekt sind.

Abgabe: 16.06.2016, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)