

Übungsblatt 6

31.05.2016 – 07.06.2016

Einführung in die Numerik SS 2016

Aufgabe 1. Newton-Cotes-Formel (4 Punkte)

Die n -te abgeschlossene Newton-Cotes-Formel $I^{(n)}(\cdot)$, d.h.

$$I^{(n)}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i), \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad \alpha_i = \int_a^b L_i^{(n)}(x) dx$$

ist gemäß ihrer Konstruktion exakt für Polynome aus P_n . Zeigen Sie, daß sie im Falle gerader $n > 0$ sogar Polynome aus P_{n+1} exakt integriert.

Aufgabe 2. Simpson-Regel (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die 2-te abgeschlossene Newton-Cotes-Formel $I^{(2)}$ (siehe Aufgabe 1), d.h. die Simpson, die Darstellung aus Beispiel 3.1.1 der Vorlesung sowie die dort gegebene Fehlerformel hat.

Aufgabe 3. Fehlerabschätzungen von Quadraturregeln (2 Punkte)

Aus der entsprechenden Fehlerabschätzung ermittle man, wieviele Funktionsauswertungen nötig wären, um das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx = 0.54930614\dots$$

mit Hilfe der summierten Trapezregel und mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} zu berechnen.

Aufgabe 4. Gauß'sche Quadratur (8 Punkte)

Man bestimme eine Gauß'sche Quadraturformel mit möglichst geringer Anzahl von Stützstellen, welche das Integral

$$I = \int_{-1}^1 p(x) \sqrt{|x|} dx$$

für alle Polynome $p \in P_3$ exakt integriert.

Tip: Das Ziel dieser Aufgabe besteht darin, eine modifizierte Gauß-Quadratur (siehe Bemerkung 3.25 aus der Vorlesung) zu bauen, bei der das Skalarprodukt

$$(f, g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{|x|} dx$$

zum Einsatz kommt. Insbesondere sollen die Legendre-artigen Polynome, sowie die Quadraturgewichte, zu diesem Skalarprodukt händisch ausgerechnet werden. Beweisen müssen Sie Ihre Aussagen nicht.

Aufgabe 5. Praktische Aufgabe Quadratur (2 + 4 + 4 Punkte)

Wir wollen ein Programm zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$I(f) := \int_0^1 \frac{1}{1+2x} dx = \frac{1}{2} \ln(3)$$

mit der summierten Trapezregel $I_S^{(1)}(f)$ und der summierten Simpsonregel $I_S^{(2)}(f)$ basierend auf der äquidistanten Intervallzerlegung $x_i = i/N$ ($i = 0, \dots, N$) schreiben. Hierzu findet sich die Quelltextdatei `quadratur.cpp` im Moodle-System.

- a. Ergänzen Sie die Funktion `double composed_trapezoidal_rule(int n, double a, double b)`, die für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ die summierte Trapezregel für obige Funktion berechnet.
- b. Ergänzen Sie die Funktion `double composed_simpson_rule(int n, double a, double b)`, die für ein beliebiges Intervall $[a, b]$ die summierte Simpson-Regel für obige Funktion berechnet.
- c. Schreiben Sie eine Hauptroutine, die den Quadraturfehler für beide Quadraturverfahren für $N = 2, 4, 6, \dots, 200$ auswertet. Die Ergebnisse sollen in Gnuplot mit einem doppelt-logarithmischen Plot als Fehlergraphen (d.h. N vs. Fehler) ausgegeben werden.

Abgabe: 07.06.2016, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)