Interdisziplinäres Zentrum
für Wissenschaftliches Rechnen (IWR)
Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg

Dr. Peter Zaspel

Übungsblatt 3

10.05.2016 – 17.05.2016

Einführung in die Numerik SS 2016

Aufgabe 1. Lagrange-Interpolation (8 Punkte)
Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}$, auf einem beschränkten Intervall $[a, b]$. Man zeige, daß in diesem Fall das Restglied $R_n(f, x)$ der Lagrange-Interpolation von f über beliebig verteilten $n + 1$ Stützstellen aus $[a, b]$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert.

Aufgabe 2. Eigenschaften der kubischen Spline Interpolation (4+4 Punkte)
Auf dem Interval $I = [0, 2]$ seien die Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ gegeben, $X = \{x_0, x_1, x_2\}$. Sei $S(X)$ der Vektorraum der kubischen Splines mit **natürlichen** Randbedingungen.

a. Welche der folgenden Funktionen sind im $S(X)$? Begründen Sie ihre Antwort.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2(x-6) - (x-2)^2\,, \\ f_2(x) &= \max\{0, x-1\}^3 - \tfrac{1}{2}x^3\,, \\ f_3(x) &= x^3 - x^2\,. \end{aligned}$$

b. Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s \in S(X)$ von $f(x) = x^3$.

Aufgabe 3. Fehler der kubischen Spline Interpolation (4 Punkte)
Gegeben seien eine äquidistante Zerlegung $X = (x_0, \cdots, x_N)$ des Intervals $[0, 1]$ mit
$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$, es gilt also $h = x_j - x_{j-1}$ für $j = 1, 2, \cdots, N$, mit $h = 1/N$.

Betrachten Sie auf diesem Intervall die Funktion $f(x) = \sin(2\pi x)$ und die zugehörige interpolierende kubische Splinefunktion $s \in S$ mit natürlichen Randbedingungen.

Wie groß muss die Zahl N gewählt werden, damit auf dem gesamten Intervall die Differenz zwischen s und f betragsmäßig kleiner als 10^{-12} ausfällt?

Aufgabe 4. Praktische Aufgabe zur Spline Interpolation (4+2+2+2 Punkte)
Ziel dieser Aufgabe ist es, die Interpolation mittels kubischer Splines im Rechner zu implementieren. Insbesondere sei hierbei auf Bemerkung 2.2.4 aus der Vorlesung verwiesen, die die praktische Umsetzung beschreibt. Als Basis dient der im Moodle-Kurs bereitgestellte Quelltext in der Datei `spline.cpp`. Das Programm lässt sich mittels

```
g++ -o spline spline.cpp -lm
```

kompilieren und über `./spline` ausführen.

a. Vervollständigen Sie die Funktion `void computeCubicSplineCoefficients(double** a, double* x, double* y, int n)`, die ausgehend von Stützstellen

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n\,,$$

(d.h. `x[0],..., x[n]`) und zugehörigen Stützwerten $y_0, y_1, \dots, y_n$ (`y[0],..., y[n]`) die Koeffizienten $a_k^{(i)}, k = 0, \cdots, 3,\ i = 1, \cdots, n$ (`a[i][k]`) des natürlichen kubischen Interpolationssplines s,

$$s(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x - x_i) + a_2^{(i)}(x - x_i)^2 + a_3^{(i)}(x - x_i)^3 \quad \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i],$$

berechnet. Dazu stellen Sie zunächst das $(n-1) \times (n-1)$ Lineare Gleichungssystem (siehe Vorlesung) auf, indem sie die $n-1 \times n-1$-Matrix `matrix[i][j]` und die rechte Seite `rhs[j]` befüllen. Der (vorgegebene) Funktionsaufruf `solveByGaussSeidel(sol, matrix, rhs, n-1);` berechnet dann die Lösung des LGS die anschließend im Array `sol` der Länge $n-1$ vorliegt. Hiernach sind dann die Koeffizienten $a_k^{(i)}$ gemäß Vorlesung zu berechnen.

b. Ergänzen Sie die Funktion `double evaluateCubicSpline(double x_eval, double* x, double** a, int n)`, die für gegebene Koeffizienten `a`, Stützstellen `x` die Splinefunktion an der Stelle `x_eval` auswertet und den Funktionswert an als Rückgabewert zurückgibt.

c. Testen Sie die Spline-Interpolation mittels für das Beispiel aus Aufgabe 2 b, indem Sie Ihre geschriebenen Funktionen verwenden, den Spline an den Stellen $t_i = \frac{2}{100} * i$ auswerten und anschließend über `gnuplot` darstellen. (Der Quelltext für diesen Test ist bereits in der `main`-Funktion enthalten, so dass hier ein einfaches Ausführen des Programmes sowie von gnuplot reicht.)

d. Modifizieren Sie nun das Hauptprogramm `main` (*Bitte vorher Quelltext in eine neue Datei kopieren!*) so, dass Sie folgendes höchst realistischen Beispiel umsetzen:

Die Geologen der Universität Heidelberg brauchen Ihre Hilfe. Auf der schwäbischen Alb wurden die Überreste von Versteinerungen gefunden, die zu einem Saurierskelett gehören. Um die Umrisse des Sauriers rekonstruieren zu können, wird das 14 mal 5 Meter große Fundgebiet mit einem Raster überzogen und jedes Fundstück Dinosaurierhaut in diesem Koordinatensystem lokalisiert. Nach einer logischen Reihung ergibt sich folgende Tabelle von Fundkoordinaten (x_i, y_i) für die von 0 bis 12 nummerierten Fundstücke (*Achtung: Die x_i sind hier keine Stützstellen!*):

Nr.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	3.75	3.75	2.25	1.25	0.25	0.75	4.00	5.50	6.25	9.00	12.50	12.75	12.25
y_i	0.25	1.50	3.25	4.25	4.65	4.83	2.50	3.25	3.65	3.00	1.25	2.15	3.50

Gehen Sie zur Rekonstruktion des Sauriers folgendermaßen vor: Die Gestalt des Sauriers wird durch eine Kurve

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [0,T]$$

beschrieben, wobei die Funktionen ϕ und ψ durch je einen Spline genähert werden. Da das Durchlaufen der Kurve „mit konstanter Geschwindigkeit" geschehen soll, läßt man die Bogenlänge der Kurve einfließen, indem man als Stützstellen die Werte

$$t_0 := 0, t_i := t_{i-1} + \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad \text{fü r} \;\; i = 1, \dots, 12$$

benutzt. Berechnen Sie mit den von Ihnen geschriebenen Funktionen analog zur vorangegangenen Aufgabe einen Spline s_ϕ mit Stützstellen t_i und Stützwerten x_i sowie einen weiteren Spline s_ψ mit Stützstellen t_i und Stützwerten y_i. Die genäherte Gestalt des Sauriers ergibt sich dann aus der Kurve

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} s_\phi(t) \\ s_\psi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad t \in [t_0, t_{12}]$$

Werten Sie diese Kurve mit Ihrer Prozedur aus **b**. an den Stellen $t = \xi_j := \frac{t_{12}}{100} \cdot j, \; j = 0, 1, \dots, 100$ aus, und fertigen Sie eine (grobe) Skizze des Sauriers an, z.B. mit gnuplot.

Hinweise:

- Sie können den Spline in gnuplot visualisieren, wenn Sie die Ergebnisse in eine Datei schreiben, bei der in jeder Zeile ein Wertepaar x y steht:

```
plot "test.dat" using 1:2 with lines
```

- Erste Expertisen vermuten einen weiblichen Brontosaurus mittleren Alters.

Abgabe: 17.05.2016, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)