Interdisziplinäres Zentrum
für Wissenschaftliches Rechnen (IWR)
Ruprecht–Karls–Universität Heidelberg

Dr. Peter Zaspel

# Übungsblatt 1

26.04.2016 – 03.05.2016

## Einführung in die Numerik SS 2016

**Aufgabe 1.** Zahlendarstellung (1+1+2 Punkte)
In der Vorlesung wurde das Gleitkommagitter $A(b, r, s)$, d.h. die Menge aller Gleitkommazahlen, vorgestellt. Dabei ist $b$ die Basis, $r$ die Anzahl der Stellen der Mantisse und $s$ die Anzahl der Stellen des Exponenten.

a) Gegeben sei $x_0 = (0.5731 \times 10^5)_8 \in A(8, 5, 1)$, d.h. in der oktalen Darstellung. Wie lautet diese Zahl in der normierten Gleitekommadarstellung $A(10, 5, 1)$ zur Basis 10?

b) Gegeben sei die reelle Zahl $x_1 = 0.3 \in R$ in der Dezimaldarstellung. Bilden Sie $x_1$ in die normierten Gleitkommadarstellung $A(2, 10, 2)$ zur Basis 2 ab und danach wieder auf $A(10, r, 1)$ ab. Für welche $r$ bekommt man wieder 0.3?

c) Berechnen Sie $\max\limits_{x_2, x_3} |x_2 - x_3|$ in der Dezimaldarstellung, wobei $x_2 \in A(4, 6, 2)$ und $x_3 \in A(3, 7, 1)$.

Runden Sie das Ergebnis. Man kann Taschenrechner oder Computer benutzen.

**Aufgabe 2.** Maschinenoperationen (1+1+1+1 Punkte)
In den folgenden Rechnungen führe man die arithmetischen Operationen $\oplus, \ominus, \odot$ und $\oslash$ als Maschinenoperationen durch. Man nehme für alle Zahlen die Darstellung $0.XYZ \cdot 10^y$ an, wobei $X, Y, Z \in \mathbb{N}$ Platzhalter für drei Nachkommastellen und $y \in \mathbb{Z}$ den Exponenten bezeichnet. Das Zwischenergebnis jedes elementaren Rechenschritts ist durch Rundung in folgende Darstellung zu bringen, bezeichnet mit $rd()$.

**Beispiele**: $rd(16.17) = 0.162 \cdot 10^2$, $rd(311344788.1) = 0.311 \cdot 10^9$.

Man berechne die folgenden Ausdrücke unter Verwendung der beschriebenen Maschinenoperationen und vergleiche mit den exakten Werten. Was sind jeweils die absoluten und relativen Fehler?

**a.** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ als $(a \odot d) \ominus (b \odot c)$ mit $a = 3.98$, $b = 6.05$, $c = 2.06$ und $d = 3.11$

**b.** Ausdruck wie zuvor jedoch mit $b = 6.02$

**c.** $x^2 - y^2$ als $(x \odot x) \ominus (y \odot y)$ mit $x = 1.35$ und $y = 1.37$

**d.** $(x + y)(x - y)$ als $(x \oplus y) \odot (x \ominus y)$ mit Werten wie zuvor

**Hinweis**: Bezeichne $E_{abs} = x_0 - x$ den absoluten Fehler einer Approximation $x_0$ eines Werts $x$, so ist der relative Fehler definiert als $E_{rel} := E_{abs}/x$.

**Aufgabe 3.** Kondition (2+4 Punkte)
Für eine reellwertige, differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei die relative Konditionszahl definiert durch

$$\kappa(f, x) := \left| \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \right|.$$

**a.** Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ berechne und bewerte man für die folgenden Funktionen die relative Konditionszahl in Abhängigkeit von $x$ im jeweiligen Definitionsbereich

$$f(x) = a \circ x, \quad \text{wobei } \circ \in \{-, /\}.$$

**b.** Man berechne die relative Konditionszahl der Funktion

$$g(x) = e^x - 1$$

in Abhängigkeit von $x$ und die Grenzübergänge für $x \to \infty, -\infty, 0$. Für welche Bereiche ist diese Auswertung gut bzw. schlecht konditioniert?

**Aufgabe 4.** Fehlerfortpflanzung bei verschiedenen Verfahren (3+1+2 Punkte)
Gegeben sei die Folge

$$y_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Die Folge $(y_n)_0^\infty$ ist positiv, monoton fallend und konvergiert gegen 0.

Zur Berechnung wende man nun das folgende rekursive Verfahren an:

$$\tilde{y}_0 = \log 6 - \log 5 \approx 0.182$$
$$\tilde{y}_n = \frac{1}{n} - 5\tilde{y}_{n-1}, \quad n = 1, \ldots$$

**a.** Man beweise, dass das Verfahren für exakte Arithmetik das korrekte Ergebnis liefert.

**b.** Man berechne $\tilde{y}_n$, $n = 0, \ldots, 8$ mittels Maschinenoperationen, d.h. gerundet auf drei Nachkommastellen, und den absoluten Fehler bezüglich der gleichen Berechnung mit höherer Genauigkeit, wie sie z.B. ein Computer oder ein Taschenrechner verwendet, die man hier als "exakt" bertrachten kann. Was passiert, und warum?

**c.** Man schlage ein alternatives rekursives Verfahren vor, das zu besseren Ergebnisse führt, und berechne damit $\tilde{y}_n$, $n = 0, \ldots, 8$ und die entsprechenden absoluten Fehler.

**Hinweis**: Schreiben Sie die rekursion Rückwärts, und fangen Sie z.B. mit $\tilde{y}_9 \approx 0$ an.

## Abgabe: 03.05.2016, 14:00-14:15 Uhr. (Mappen in der Vorlesung)